第27卷 第6期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 6
2010年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1021-09

改进的移动最小二乘插值法研究*

任红萍[1]，程玉民[2]，张　武[3]

(1- 太原科技大学应用科学学院，太原 030024;
2- 上海大学 上海市应用数学和力学研究所，上海 200072;
3- 上海大学计算机工程与科学学院，上海 200072)

摘　要: 本文首先从内积的角度给出了移动最小二乘逼近法的新的推导方法，然后对Lancaster等提出的移动最小二乘插值法进行了重新推导，取在插值节点奇异的权函数，并对基函数进行部分正交化，建立了改进的移动最小二乘插值法，并证明了其形函数的插值性质。本文提出的改进移动最小二乘插值法的公式比Lancaster的公式更为简单，并可提高形函数的计算效率。本文为工程问题的插值型无网格方法提供了建立形函数的基本方法。

关键词: 移动最小二乘法；移动最小二乘插值法；形函数；权函数；紧支域

分类号: **AMS**(2000) 65N99　　**中图分类号**: O24　　**文献标识码**: A

1　引言

无网格方法是继有限元法之后的又一类重要的科学和工程分析的数值方法。移动最小二乘逼近法 (Moving least-squares approximation) 是无网格方法构造形函数的最为重要的方法之一[1]。由于移动最小二乘逼近法的形函数不具有Kronecker Delta函数的性质，因而基于该方法建立的无网格方法需要借助罚函数法或Lagrange乘子法施加本质边界条件，导致建立的弱形式方程较为复杂，降低了无网格方法的计算效率。所以，研究具有插值性质的移动最小二乘插值法 (Interpolating moving least-squares method) 是非常重要的。1981年，Lancaster等在进行曲面拟合时推广了标准的最小二乘形式，提出了移动最小二乘逼近法和移动最小二乘插值法[2]。移动最小二乘逼近法的形函数比移动最小二乘插值法的形函数简单得多，以至于后来发展的基于移动最小二乘概念的无网格方法基本上都是基于移动最小二乘逼近法。

Mukherjee等对移动最小二乘法进行了改进，以方便无单元Galerkin方法处理边界条件[3]；陈美娟和程玉民等提出了改进的移动最小二乘法[4]；程玉民等提出了复变量移动最小二乘法[5]及其相应的复变量无网格方法[6-8]。本文首先从内积的角度给出了移动最小二乘逼近法的新的推导方法，然后对Lancaster等提出的移动最小二乘插值法进行了重新推导，取在插值节点奇异的权函数，并对基函数进行部分正交化，建立了改进的移动最小二乘插值法，并证明了其形函数的插值性质。本文提出的改进的移动最小二乘插值法的公式比Lancaster的公式更为简单，可提高形函数的计算效率。

收稿日期: 2009-11-26.　**作者简介**: 任红萍 (1966年9月生)，女，博士，副教授. 研究方向：计算数学.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10871124)；上海市教育委员会科研创新项目 (09ZZ99).

2 移动最小二乘法

定义在区域Ω上的函数$u(\mathbf{x})$，已知其在域内N个节点$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N$的函数值，取函数[1,2]

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{m}p_i(\mathbf{x})\cdot a_i(\mathbf{x})=\mathbf{p}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbf{\Omega},\tag{1}$$

为函数$u(\mathbf{x})$的逼近函数。这里$p_i(\mathbf{x})$是基函数，m是基函数的个数，$a_i(\mathbf{x})$是相应的系数。基函数的通常形式为

线性基：

$$\mathbf{p}^T=(1,x_1),\quad 对于一维区域.\tag{2}$$

$$\mathbf{p}^T=(1,x_1,x_2),\quad 对于二维区域.\tag{3}$$

二次基：

$$\mathbf{p}^T=(1,x_1,x_1^2),\quad 对于一维区域.\tag{4}$$

$$\mathbf{p}^T=(1,x_1,x_2,x_1^2,x_1x_2,x_2^2),\quad 对于二维区域.\tag{5}$$

对应于(1)式的整体逼近，在点$\mathbf{x}$的邻域内的局部逼近定义为

$$u^h(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}})=\sum_{i=1}^{m}p_i(\bar{\mathbf{x}})\cdot a_i(\mathbf{x})=\mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}})\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x}).\tag{6}$$

系数$a_i(\mathbf{x})\,(i=1,2,\cdots,m)$可由局部近似的加权最小二乘拟合得到，即对每一点$\mathbf{x}$, $\mathbf{a_i}(\mathbf{x})$的选择总是使下列定义的泛函取极小值。定义

$$\begin{aligned}J&=\sum_{I=1}^{n}w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\big[u^h(\mathbf{x},\mathbf{x}_I)-u(\mathbf{x}_I)\big]^2\\&=\sum_{I=1}^{n}w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\Big[\sum_{i=1}^{m}p_i(\mathbf{x}_I)\cdot a_i(\mathbf{x})-u(\mathbf{x}_I)\Big]^2,\end{aligned}\tag{7}$$

其中$w(\mathbf{x}-\mathbf{x_I})$是具有紧支集特性的权函数，$\mathbf{x}_I\,(I=1,2,\cdots,n)$为点$\mathbf{x}$的紧支域内的节点。

(7)式可用矩阵形式表示为

$$J=(\mathbf{pa}-\mathbf{u})^{\mathbf{T}}\mathbf{W}(\mathbf{x})(\mathbf{pa}-\mathbf{u}),\tag{8}$$

其中

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T=\big(u(\mathbf{x}_1),u(\mathbf{x}_2),\cdots,u(\mathbf{x}_n)\big)^T,\tag{9}$$

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}p_1(\mathbf{x}_1)&p_2(\mathbf{x}_1)&\cdots&p_m(\mathbf{x}_1)\\p_1(\mathbf{x}_2)&p_2(\mathbf{x}_2)&\cdots&p_m(\mathbf{x}_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\p_1(\mathbf{x}_n)&p_2(\mathbf{x}_n)&\cdots&p_m(\mathbf{x}_n)\end{bmatrix}=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m),\tag{10}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{x})=\big(a_1(\mathbf{x}),a_2(\mathbf{x}),\cdots,a_n(\mathbf{x})\big)^T. \tag{12}$$

对于函数 $f(\mathbf{x})$，在点 $\mathbf{x}$ 我们记

$$\mathbf{f}=\big(f(\mathbf{x}_1),f(\mathbf{x}_2),\cdots,f(\mathbf{x}_n)\big)^T, \tag{13}$$

定义函数 $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}$ 点的内积为

$$(f,g)_{\mathbf{x}}=(\mathbf{f},\mathbf{g})_{\mathbf{x}}=\mathbf{f}^T\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{g}=\sum_{I=1}^{n}w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)f(\mathbf{x}_I)g(\mathbf{x}_I), \tag{14}$$

相应地，定义在 $\mathbf{x}$ 点的范数为

$$\|\mathbf{f}\|_x=\big[(\mathbf{f},\mathbf{f})_{\mathbf{x}}\big]^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

由 (8) 式得

$$J=\|\mathbf{pa}-\mathbf{u}\|_{\mathbf{x}}^{2}=\|a_1\mathbf{p}_1+a_2\mathbf{p}_2+\cdots+a_m\mathbf{p}_m-\mathbf{u}\|_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2}}, \tag{16}$$

则 $\mathbf{u}$ 在空间 $\mathrm{span}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m)$ 上的投影向量 $\mathbf{u}^{(1)}$ 对应的

$$J=\|\mathbf{u}^{(1)}-\mathbf{u}\|_{\mathbf{x}}^{2} \tag{17}$$

即为最小。故将 $\mathbf{u}$ 正交分解为

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(1)}+\mathbf{u}^{(2)}, \tag{18}$$

其中

$$\mathbf{u}^{(1)}\in\mathrm{span}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m), \tag{19}$$

$$\mathbf{u}^{(2)}\perp\mathrm{span}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m), \tag{20}$$

所以

$$(\mathbf{p}_i,\mathbf{u})_{\mathbf{x}}=(\mathbf{p}_i,\mathbf{u}^{(1)})_{\mathbf{x}}+(\mathbf{p}_i,\mathbf{u}^{(2)})_{\mathbf{x}}=(\mathbf{p}_i,\mathbf{u}^{(1)})_{\mathbf{x}}, \tag{21}$$

即

$$(\mathbf{p}_i,\mathbf{u})_{\mathbf{x}}=(\mathbf{p}_i,\mathbf{u}^{(1)})_{\mathbf{x}}=\Big(\mathbf{p}_i,\sum_{j=1}^{m}a_j(\mathbf{x})\mathbf{p}_j\Big)_{\mathbf{x}}, \tag{22}$$

写成矩阵形式，即为

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)_{\mathbf{x}} & (\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)_{\mathbf{x}} & \cdots & (\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_m)_{\mathbf{x}} \\ (\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)_{\mathbf{x}} & (\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2)_{\mathbf{x}} & \cdots & (\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_m)_{\mathbf{x}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{p}_m,\mathbf{p}_1)_{\mathbf{x}} & (\mathbf{p}_m,\mathbf{p}_2)_{\mathbf{x}} & \cdots & (\mathbf{p}_m,\mathbf{p}_m)_{\mathbf{x}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1(\mathbf{x}) \\ a_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\mathbf{p}_1,\mathbf{u})_{\mathbf{x}} \\ (\mathbf{p}_2,\mathbf{u})_{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ (\mathbf{p}_m,\mathbf{u})_{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

即

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{24}$$

这里

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P}, \tag{25}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T\mathbf{W}(\mathbf{x}). \tag{26}$$

解方程组 (24) 可得

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{27}$$

把式 (27) 代入式 (1) 即得到逼近函数的表达式

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{I=1}^{n} \Phi_I(\mathbf{x})u_I, \tag{28}$$

这里 $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ 称为形函数，且为

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \big(\Phi_1(\mathbf{x}), \Phi_2(\mathbf{x}), \cdots, \Phi_n(\mathbf{x})\big) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}). \tag{29}$$

当 $m = 1$ 时，唯一的基函数 $p_1(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{1}$，此时逼近函数为

$$u^h(\mathbf{x}) = \frac{\sum\limits_{I=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)u_I}{\sum\limits_{I=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)}. \tag{30}$$

归一化权函数为

$$v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \frac{w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\sum\limits_{I=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{31}$$

记

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \big(v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2), \cdots, v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)\big)^T, \tag{32}$$

$$u^s(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)u(\mathbf{x}_I) = \mathbf{v}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}. \tag{33}$$

3 改进的移动最小二乘插值法

移动最小二乘法得到的逼近函数是不经过插值节点的，若要逼近函数经过所有插值节点，就必须使权函数 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ 在 $\mathbf{x_i}$ 点处是奇异的，但这就导致方程组 (24) 的系数矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P}$ 在 $\mathbf{x} \to \mathbf{x_i}$ 时趋于 ∞，为了解决这个问题，我们对基函数进行如下正交处理。

在空间 $\mathrm{span}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m)$ 中，将基函数 $p_1(\mathbf{x}) \equiv 1$ 在 $\mathbf{x}$ 点单位化为

$$\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(1)} = \frac{\mathbf{p_1}}{\|\, \mathbf{p_1} \,\|_{\mathbf{x}}} = \frac{1}{\big[\sum\limits_{I=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\big]^{\frac{1}{2}}}. \tag{34}$$

再将 $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \cdots, \mathbf{p}_m$ 与 $\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(1)}$ 在 $\mathbf{x}$ 点正交化为

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}) &= p_i(\mathbf{x}) - (\mathbf{p}_i, \mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(1)})_{\mathbf{x}} b_{\mathbf{x}}^{(1)} = p_i(\mathbf{x}) - \frac{\sum\limits_{I=1}^{n} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)p_i(\mathbf{x}_I)}{\sum\limits_{I=1}^{n} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)} \\ &= p_i(\mathbf{x}) - \sum_{I=1}^{n} v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)p_i(\mathbf{x}_I), \quad i = 2, 3, \cdots, m, \end{aligned} \tag{35}$$

即

$$b_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}) - p_i^s(\mathbf{x}), \tag{36}$$

记

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} b_{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{x}_1) & b_{\mathbf{x}}^{(3)}(\mathbf{x}_1) & \cdots & b_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{x}_1) \\ b_{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{x}_2) & b_{\mathbf{x}}^{(3)}(\mathbf{x}_2) & \cdots & b_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{x}_n) & b_{\mathbf{x}}^{(3)}(\mathbf{x}_n) & \cdots & b_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}. \tag{37}$$

现在我们对新的基 $b_{\mathbf{x}}^{(1)}(\mathbf{x}), b_{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{x}), \cdots, b_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{x})$ 使用移动最小二乘法，注意到基中后面 $m-1$ 个与第一个之间是正交的，以及第一个的范数是 1，则逼近函数为

$$u^h(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(1)})_{\mathbf{x}} b_{\mathbf{x}}^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=2}^{m} a_{i-1}(\mathbf{x}) b_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}), \tag{38}$$

即

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}), \tag{39}$$

其中

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \left(b_{\mathbf{x}}^{(2)}(\mathbf{x}), b_{\mathbf{x}}^{(3)}(\mathbf{x}), \cdots, b_{\mathbf{x}}^{(m)}(\mathbf{x})\right)^T, \tag{40}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \left(a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \cdots, a_{m-1}(\mathbf{x})\right)^T. \tag{41}$$

由移动最小二乘法可得

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{42}$$

这里

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{C}_{\mathbf{x}}, \tag{43}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}). \tag{44}$$

将式 (42) 代入式 (39) 可得

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{u}. \tag{45}$$

式 (45) 可以写成

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{I=1}^{n} \Phi_I(\mathbf{x}) u_I, \tag{46}$$

形函数为

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}). \tag{47}$$

将式 (42) 与 Lancaster 得到的公式

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\big(\mathbf{u} - (\mathbf{v}^T(\mathbf{x})\mathbf{u})\mathbf{p}_1\big), \tag{48}$$

相比，式 (42) 更简洁。

4 改进的移动最小二乘插值法的插值特性

引理 1 若取权函数为

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^{\alpha}},$$

其中 α 为一正偶数，$i=1,2,\cdots,n$，$v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)$ 由式 (31) 给出，则有

1) $0 \le v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \le 1$； 2) $\sum\limits_{I=1}^{n} v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) = 1$； 3) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_j} v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = \delta_{ij}$；

4) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k)v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j) = w(\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_k),\quad k\neq j$；

5) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} f^s(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_i)$； 6) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} b_{\mathbf{x}}^{(j)}(\mathbf{x}) = 0$； 7) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_j} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0$。

证明 1), 2) 显然。下证 3)，当 $j=i$ 时

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} \frac{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^{\alpha}}}{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|^{\alpha}}} = 1,$$

当 $j\neq i$ 时

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_j} v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_j} \frac{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^{\alpha}}}{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|^{\alpha}}} = 0.$$

对于 4)，当 $k\neq j$ 时

$$\begin{aligned}&\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k)v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)\\ =&\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k} \frac{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k|^{\alpha}}\cdot\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|^{\alpha}}}{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k|^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n|^{\alpha}}} = \frac{1}{|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_j|^{\alpha}} = w(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_j).\end{aligned}$$

对于 5)，因为

$$f^s(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)f(\mathbf{x}_I),$$

故有

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} f^s(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i}\sum_{I=1}^{n} v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)f(\mathbf{x}_I) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i).$$

要证 6)，由式 (36) 并注意到 (5) 可得

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} b_{\mathbf{x}}^{(j)}(\mathbf{x}) = p_j(\mathbf{x}_i) - \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} p_j^s(\mathbf{x}) = p_j(\mathbf{x}_i) - p_j(\mathbf{x}_i) = 0.$$

7) 由式 (40) 及 (6) 可得。 **证毕**

因为权函数在插值点的奇异性，我们先计算经过正交处理后的基函数之间的内积以及它们和任意函数的内积当自变量趋于插值点时的极限情况。

引理2 当 $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_k$ 时，$(\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(i)}, \mathbf{u})_{\mathbf{x}}$ 和 $(\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(l)}, \mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(i)})_{\mathbf{x}}\,(i, l = 2, 3, \cdots, m)$ 的极限存在，且分别为

1) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k} (\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(i)}, \mathbf{u})_{\mathbf{x}} = \sum\limits_{I=1, I\neq k}^{n} [p_i(\mathbf{x}_I) - p_i(\mathbf{x}_k)] w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k)[u(\mathbf{x}_I) - u(\mathbf{x}_k)]$;

2) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k} (\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(l)}, \mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(i)})_{\mathbf{x}} = \sum\limits_{I=1, I\neq k}^{n} [p_i(\mathbf{x}_I) - p_i(\mathbf{x}_k)] w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k)[p_l(\mathbf{x}_I) - p_l(\mathbf{x}_k)]$.

故当 $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_k$ 时，$\mathbf{A}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ 的极限存在，从而 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 的极限存在。

证明 1) 首先由内积定义知

$$(b_{\mathbf{x}}^{(i)}, u)_{\mathbf{x}} = \sum_{I=1}^{n} b_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}_I) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) u(\mathbf{x}_I),$$

由引理1的结论可知

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}_I) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) u(\mathbf{x}_I) &= \left(p_i(\mathbf{x}_I) - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) p_i(\mathbf{x}_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}\right) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) u(\mathbf{x}_I) \\ &= u(\mathbf{x}_I) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \sum_{j=1, j\neq I}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)\big(p_i(\mathbf{x}_I) - p_i(\mathbf{x}_j)\big), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k} (b_{\mathbf{x}}^{(i)}, u)_{\mathbf{x}} &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k} \sum_{I=1}^{n} u(\mathbf{x}_I) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \sum_{j=1, j\neq I}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)\big(p_i(\mathbf{x}_I) - p_i(\mathbf{x}_j)\big) \\ &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k} \sum_{I=1, I\neq k}^{n} u(\mathbf{x}_I) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\big(p_i(\mathbf{x}_I) - p_i(\mathbf{x}_k)\big) \\ &\quad + u(\mathbf{x}_k) \sum_{j=1, j\neq I}^{n} w(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)\big(p_i(\mathbf{x}_k) - p_i(\mathbf{x}_j)\big) \\ &= \sum_{I=1, I\neq k}^{n} \big(p_i(\mathbf{x}_I) - p_i(\mathbf{x}_k)\big) w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k)\big(u(\mathbf{x}_I) - u(\mathbf{x}_k)\big). \end{aligned}$$

2) 由内积定义知

$$(\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(i)}, \mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(l)})_{\mathbf{x}} = \sum_{I=1}^{n} b_{\mathbf{x}}^{(l)}(\mathbf{x}_I) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) b_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{x}_I),$$

由(1)及引理1的结论有

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k}(\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(i)},\mathbf{b}_{\mathbf{x}}^{(l)})_{\mathbf{x}} &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_k}\sum_{I=1}^{n} b_{\mathbf{x}}^{(l)}(\mathbf{x}_I)v(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\sum_{j=1,j\neq I}^{n} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)\big(p_i(\mathbf{x}_I)-p_i(\mathbf{x}_j)\big)\\ &= \sum_{I=1,I\neq k}^{n}\big(p_i(\mathbf{x}_I)-p_i(\mathbf{x}_k)\big)w(\mathbf{x}_I-\mathbf{x}_k)\big(p_l(\mathbf{x}_I)-p_l(\mathbf{x}_k)\big).\end{aligned}$$

证毕

定理 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} u^h(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_i) = u_i.$

证明　由式(39)以及引理2得

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} u^h(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i} u^s(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i}\mathbf{b}^T(\mathbf{x})\cdot\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_i}\mathbf{a}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_i).$$

5 结论

本文首先从内积的概念给出了移动最小二乘逼近法的新的推导方法，然后对Lancaster等提出的移动最小二乘插值法进行了改进，取在插值节点奇异的权函数，并对基函数进行部分正交化，建立了改进的移动最小二乘插值法，并证明了其形函数的插值性质。本文提出的改进的移动最小二乘插值法的公式比Lancaster的公式更为简单，可提高形函数的计算效率。基于本文方法建立的无网格方法可以方便地直接施加本质边界条件，减少以往大多数借助罚函数法或Lagrange乘子法施加本质边界条件时求弱形式较为复杂的问题，从而提高无网格方法方程的计算效率。

参考文献：

[1] Belytschko T, *et al.* Meshless method: an overview and recent developments[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139: 3-47

[2] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least square methods[J]. Mathematics of Computation, 1981, 37: 141-158

[3] Mukherjee Y X, Mukherjee S. On boundary conditions in the element-free Galerkin method[J]. Computational Mechanics, 1997, 19: 264-270

[4] 陈美娟，程玉民. 改进的移动最小二乘法[J]. 力学季刊，2003, 24(2): 266-272
Chen M J, Cheng Y M. The improved moving least-square approximation[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2003, 24(2): 266-272

[5] 程玉民，彭妙娟，李九红. 复变量移动最小二乘法及其应用[J]. 力学学报，2005, 37(6): 719-723
Cheng Y M, Peng M J, Li J H. The moving least-square approximation and its application[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2005, 37(6): 719-723

[6] 程玉民，李九红. 弹性力学的复变量无网格法[J]. 物理学报，2005, 54(10): 4463-4471
Cheng Y M, Li J H. A meshless method with complex variables for elasticity[J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(10): 4463-4471

[7] Cheng Y M, Li J H. A complex variable meshless method for fracture problems[J]. Science in China Ser G Physics, Mechanics & Astronomy, 2006, 49(1): 46-59

[8] 李九红，程玉民. 一种新的无网格方法与有限元耦合法[J]. 工程数学学报，2008, 25(6): 1035-1043
Li J H, Cheng Y M. A new coupled meshless-finite element method[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(6): 1035-1043

Researches on the Improved Interpolating Moving Least-squares Method

REN Hong-ping[1], CHENG Yu-min[2], ZHANG Wu[3]

(1- School of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024;
2- Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072;
3- School of Computer Engineering and Science, Shanghai University, Shanghai 200072)

Abstract: In this paper, based on the concept of an inner product, we propose a new method to obtain the moving least-squares approximation. The interpolating moving least-squares method proposed by Lancaster is thus improved. By taking a singular weight function in the interpolating points and orthogonalizing some of basis functions, an improved interpolating moving least-squares method is formulated and the property of the corresponding shape function is proved. The new method has a simpler formula and higher computing efficiency compared with the Lancaster's method. The proposed method can be used to form the shape function of the meshless method for engineering problems.
Keywords: moving least-squares approximation; interpolating moving least-squares method; shape function; weight function; compact support domain

Received: 26 Nov 2009. **Accepted:** 26 May 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10871124); the Innovation Program of Shanghai Municipal Education Commission (09ZZ99).